

Massentrennungs- und Einschnürungseffekte in HF-Plasmen

Von H. ROTHER

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens & Halske AG, München
(Z. Naturforsch. 18 a, 300—308 [1963]; eingegangen am 28. August 1962)

Die Drift von Ionen in Hochfrequenzringentladungen wird berechnet. Unter charakteristischen Resonanzbedingungen entstehen stark massenabhängige, gleichgerichtete radiale Ionenströme. Die hiermit verbundene Massentrennwirkung entspricht der einer mechanischen Massenzentrifuge.

Eine Berechnung von Ionendriften in Hochtemperaturplasmen bei Einstrahlung von Mikrowellen transversal zu einem statischen Magnetfeld (mit \mathfrak{B} parallel zum statischen Feld) unter Vernachlässigung hydromagnetischer Effekte wird gegeben. Maximale radiale Gleichdriften entstehen in der Umgebung der Zyklotronresonanz, und zwar als Sog zur Plasmaoberfläche für Frequenzen ω unterhalb und dicht oberhalb der Zyklotronfrequenz Ω_0 . Eine Drift ins Plasmaintern (Einschnürung) kommt zustande, wenn $(\omega - \Omega_0)$ ein mehrfaches der reziproken Aufenthaltszeit eines Ions im Wirkungsbereich des HF-Feldes beträgt.

Über Wechselstromeffekte in HF-Plasmen sind im Hinblick auf Dispersionsgleichung, Absorption, thermische Dissipation und hydromagnetische Effekte, insbesondere im Bereich der Zyklotronresonanzen, eine Reihe von Arbeiten durchgeführt worden (vgl. Anm.¹⁻³). Bei diesen Untersuchungen stellte die Magnetfeldamplitude des HF-Feldes eine generell vernachlässigte Korrektion höherer Ordnung dar. In der folgenden Arbeit sollen die Effekte diskutiert werden, die wesentlich durch Mitberücksichtigung des magnetischen Wechselfeldes in den Bewegungsgleichungen zustande kommen. In Abschnitt I werden am Beispiel einer HF-Ringentladung die radia- len gleichgerichteten Drifteffekte von Ionen berechnet, die aus dem Zusammenwirken der beiden Wechselfelder entstehen. Da diese Driften unter bestimmten Resonanzbedingungen so stark sein können, als würde das elektrische Wechselfeld fast zur Hälfte als radiales Gleichfeld an den Ionen angreifen, scheint eine Verwendung der Methode zur Massentrennung diskutabel.

Die Entladungscharakteristiken (Leitfähigkeit und HF-Feldverlauf) einer solchen Ringentladung werden berechnet; in Abschnitt II wird eine kurze Diskussion ihrer Anwendung zur Massentrennung gegeben. Abschnitt III bringt eine Erweiterung der Rechnungen auf Trägerbewegungen in einem statischen Magnetfeld bei transversaler Einstrahlung von Mikrowellen, insbesondere für den mathematisch übersichtlichen Fall, daß der \mathfrak{B} -Vektor des HF-Feldes parallel zum statischen Feld polarisiert ist.

¹ L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publ. Inc., London 1956.

² S. TANAKA, Mem. of Coll. of Science, Univ. Kyoto 24 A (1961), 361.

I. Trägerdrift im HF-Feld

Wir betrachten einen zylindrischen Entladungsraum, der einem HF-Feld ausgesetzt ist, $\mathfrak{E} \times \mathfrak{B}$ in radialer Richtung, \mathfrak{B} parallel zur Zylinderachse z . Zur einfacheren analytischen Behandlung benutzen wir die komplexen Größen

$$r = x + i y, \quad E = \mathfrak{E}_x + i \mathfrak{E}_y.$$

Das HF-Feld kann dann in einem hinreichend schmalen Bereich $\Delta |r|$ in der Form angesetzt werden [siehe auch Gl. (11)]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_z &= B_0 \sin \omega t; & \mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y &= 0; \\ E &= -\frac{1}{2} i \omega B_0 \beta r \cos(\omega t - \alpha) & (1) \\ &= -i E_0 \cos(\omega t - \alpha); \\ \mathfrak{E}_z &= 0; \end{aligned}$$

β ist ein Zahlenfaktor, der von Eindringtiefe, Wellenlänge und Feldgeometrie abhängen kann; für eine Kreisspule mit verschwindender Leitfähigkeit im Entladungsraum ist $\beta = 1, \alpha = 0$.

Mit (1) lauten die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens

$$\begin{aligned} \ddot{r} + (\omega_c + i \omega_0 \sin \omega t) \dot{r} \\ + \frac{1}{2} \omega \omega_0 \beta \cos(\omega t - \alpha) r &= 0, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Hierin ist $\omega_0 = B_0 e/m$ eine charakteristische Frequenz der Bewegungsgleichungen und kann quasi als maximale Zyklotronfrequenz im magnetischen

³ T. H. STIX, Phys. Rev. 106, 1146 [1957]; Phys. Fluids 1, 308 [1958].



Wechselfeld aufgefaßt werden; e Ladung des Teilchens, m Masse. Es wird sich zeigen, daß Gl. (2) eine ähnliche Zyklotronresonanz $\omega_0 \approx \omega$ im magnetischen Wechselfeld enthält, wie die analoge Bewegungsgleichung eines Teilchens im statischen Magnetfeld.

Mit ω_c wurde formal eine Reibungskraft $-m \omega_c \dot{r}$ berücksichtigt; im vollständig ionisierten Plasma entspricht ω_c der reziproken COULOMB-Relaxationszeit zwischen Ionen und Elektronen¹.

Für schwach ionisierte Plasmen wollen wir uns zur Berechnung der mittleren Driftgeschwindigkeit $\bar{v}(t) = \dot{r}(t)$ auf die einfache „free-path“-Methode⁴ beschränken. Diese Methode liefert nach⁴ brauchbare Ergebnisse, wenn freie Weglänge Λ und Feldstärke E_0 so klein sind, daß $e E_0 \Lambda \ll k T_{i,e}$ ist⁵, was im allgemeinen in schwach ionisierten Plasmen bei nicht zu kleinem Druck zutrifft. Wenn die zur Zeit τ mit einem Neutralteilchen stoßenden Ladungsträger nach dem Stoß eine Geschwindigkeitsverteilung $f(v'(\tau))$ besitzen ($\iiint_{v'} f(v') dv' = 1$), so berechnet sich unter den gemachten Voraussetzungen $\bar{v}(t)$ aus

dem Integralausdruck:

$$\bar{v}(t) = \int_{-\infty}^t \omega_s d\tau \exp \{ -\omega_s(t-\tau) \} \int_{\tau}^t d\tau' \cdot \iiint_{v'} f(v'(\tau)) v'(\tau', v'(\tau)), \quad (3)$$

wobei in der angestrebten Näherung $f(v')$ kugelsymmetrisch und zeitunabhängig ist und ω_s durch einen geeigneten Effektivwert ersetzt wird⁶.

In Gl. (3) geht das Integral $\int_{\tau}^t \dot{v}(\tau') d\tau'$ der Bewegungsgleichung (2) ein, mit der Anfangsbedingung $v(\tau) = v'(\tau)$, $r(\tau) = r'(\tau)$; $v'(\tau)$ rotations-symmetrisch. Im Falle $\omega_0 = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ (Kreisspule mit hinreichend kleinem Induktionsstrom im Plasma) ist eine exakte Integration von (2) nach der HILLSchen Methode möglich, die im Anhang dargestellt ist. Für den allgemeinen Fall führen wir eine Näherungslösung durch, die gut brauchbar ist, solange nur jeweils ein Stück der Teilchenbahn interessiert, auf dem $\Delta |r| / |r| \ll 1$; $|\Delta \omega_0 / \omega_0| \ll 1$ (was z. B. immer der Fall ist, wenn die freie Weglänge Λ klein ist gegen die Eindringtiefe des HF-Feldes).

Mit $r \approx \text{const}$, $\omega_0 \approx \text{const}$ geht (2) über in die einfache Bewegungsgleichung für v :

$$\dot{v} + (\omega_c + i \omega_0 \sin \omega t) v = -\frac{1}{2} i \beta \omega_0 \omega \cos(\omega t - \alpha) r, \quad (4)$$

die mit Hilfe der bekannten FOURIER-Entwicklung

$$\exp \{i(\omega_0/\omega) \sin(\omega t + \delta)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\omega_0/\omega) \exp \{i n(\omega t + \delta)\}$$

elementar integriert werden kann; J_n BESSELSche Funktionen. Mit der Anfangsbedingung $v(\tau) = v'(\tau)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \dot{v}(\tau') d\tau' &= -\frac{\omega \omega_0}{4} \beta r \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} J_{n'} \exp \{i n'(\omega t + \pi/2)\} \\ &\cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{-i\alpha} J_{n+1} - e^{+i\alpha} J_{n-1}) \frac{\exp \{-i n(\omega t + \pi/2)\} [1 - \exp \{-(\omega_c - i n \omega)(t - \tau)\}]}{\omega_c - i n \omega} \right. \\ &\left. + v'(\tau) \exp \{ -\omega_c(t - \tau) \} \exp \{i(\omega_0/\omega) (\cos \omega t - \cos \omega \tau)\} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$J_n = J_n(\omega_0/\omega)$. (5) in (3) eingesetzt ergibt für die Trägerdrift in HF-Entladungen mit Ionisierungsgrad

⁴ S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, University Press, Cambridge 1952.

⁵ Der Index i bzw. e soll im folgenden immer dann zusätzlich verwendet werden, wenn wir uns speziell auf Ionen bzw. Elektronen beziehen, sofern Verwechslungen möglich sind. (ω_{0e} , ω_{ce} usw.)

⁶ Bei einer thermischen Geschwindigkeit v_{th} ist $\omega_s \approx v_{th}/\Lambda$, bis auf einen durch die Geschwindigkeitsabhängigkeit des

Streuquerschnitts sowie in gewissem Maße auch durch ω und ω_0 bestimmten Zahlenfaktor, der nur durch explizite Lösung der BOLTZMANN-Gleichung zu gewinnen wäre. Eine befriedigende allgemeine analytische Näherungslösung der Transportgleichung ist im vorliegenden Falle noch nicht erhalten; wir begnügen uns mit dem Hinweis, daß die Abhängigkeit der effektiven Stoßfrequenz ω_s von ω und ω_0 in erster Näherung vernachlässigt werden darf.

$\gamma \ll 1$:

$$\bar{v}(t) = -\frac{\omega \omega_0}{4} \beta r \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \exp \{i n'(\omega t + \pi/2)\} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \{-i n(\omega t + \pi/2)\}}{\omega_r - i n \omega} (e^{-i \alpha} J_{n+1} - e^{i \alpha} J_{n-1}), \quad (6)$$

$$\omega_r = \omega_s + \omega_c.$$

$\bar{v}(t)$ ist eine vielfach periodische Trägerdrift in der x - y -Ebene. Die Terme $(n' - n) = 0$ stellen den zeitunabhängigen, gleichgerichteten Anteil dar, die Terme $|n' - n| = 1$ ergeben in ihrem senkrecht zu r gerichteten Anteil ($\sim i r$) den für Leitfähigkeit und DK in erster Ordnung maßgebenden Wechselstrom, aus dem α und β (Phase und Eindringtiefe) von Gl. (1) bestimmt werden können.

Gleichgerichtete Ionendrift im Wechselfeld

Für den gleichgerichteten Anteil der Ionendrift ergibt (6):

$$v_{\parallel} = -\frac{\omega \omega_0}{2} \beta r \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) J_n(\omega_0/\omega) J_{n+1}(\omega_0/\omega) \frac{\omega_r \omega^2 \cos \alpha + (\omega_r^2 \omega + n(n+1)\omega^3) \sin \alpha}{(\omega_r^2 + n^2 \omega^2)(\omega_r^2 + (n+1)^2 \omega^2)}. \quad (7)$$

Aus (7) folgt, daß nur radiale Gleichdriften entstehen (die azimutale Komponente verschwindet). Das absolute Maximum von $|v_{\parallel}|$ liegt offenbar im Bereich der „Doppelresonanz“

$$\omega_0 \approx \omega \approx \omega_r, \quad (8)$$

da, wie weiter unten gezeigt wird, α generell zwischen 0 und $\pi/2$ liegt. [In einer gewissen Umgebung der Doppelresonanzstelle (8) ist v_{\parallel} nur wenig von α abhängig.] In Abb. 1 ist v_{\parallel} dargestellt für den Fall schwacher Entladung ($\alpha = 0$ bei $\omega = 2\omega_r$). Als Bezugssgröße ist die Driftgeschwindigkeit $(e/m)(E_0/\omega_r)$ von Teilchen in einem radialen elektrischen Gleichfeld $E_0 = (m/e) \frac{1}{2} \omega \omega_0 \beta r$ zugrunde gelegt [vgl. Gl. (1)].

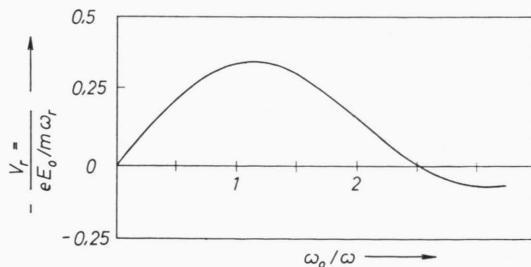


Abb. 1. Massenabhängigkeit der radialen Drift v_r in HF-Ringentladungen ($\alpha=0$, für $\omega=2\omega_r$).

Im Frequenzbereich $\omega \geq \omega_0$ konvergiert die Reihe in (8) schnell, und v_{\parallel} hat näherungsweise den Verlauf

$$v_{\parallel} \approx -\frac{e}{m} E_0 \cdot \frac{1}{\omega_r} \cdot \left[\frac{\omega^2 \cos \alpha + \omega_r \omega \sin \alpha}{\omega_r^2 + \omega^2} J_0(\omega_0/\omega) J_1(\omega_0/\omega) \right]. \quad (7')$$

In der Schreibweise (7') kommt der Zusammenhang zwischen v_{\parallel} und der Gleichfelddrift $(e/m) E_0/\omega_r$ zum Ausdruck; der Term in der eckigen Klammer kennzeichnet den Resonanzcharakter der Drift. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß v_{\parallel} für $\omega > \omega_0$ generell radial nach innen gerichtet ist, für $\omega < \frac{1}{2} \omega_0$ aber in einem gewissen Frequenzbereich radial nach außen. Die Zentrifugewirkung ist deshalb zwischen diesen Bereichen ($\omega_0 \sim 1/m$) sehr erheblich und sollte die einer idealen mechanischen Massenzentrifuge übertreffen können.

Eine wesentliche Beeinflussung der Ionendriften durch die Mitbewegung des Elektronenensembles, wie sie z. B. bei der ambipolaren Diffusion in Niederdruckentladungen eine erhebliche Rolle spielen kann, findet im Bereich der Ionenresonanzen $\omega \approx \omega_{0i}$ nicht statt: Man überzeugt sich an Hand von Gl. (7) leicht davon, daß für $\omega \approx \omega_{0i}$ das Verhältnis

$$|v_{e\parallel}/v_{i\parallel}| < (m_e/m_i)^{1/3}$$

wird. Da aber die unter dem Einfluß des ambipolaren radialen elektrischen Feldes aus $v_{i\parallel}$ entstehende resultierende Ionendrift $\hat{v}_{i\parallel}$ bei einer Ionen- bzw. Elektronenbeweglichkeit b_i bzw. b_e in erster Näherung die Gestalt hat

$$\hat{v}_{i\parallel} \approx \frac{v_{i\parallel}}{1 + b_i/b_e} \left(1 + \frac{b_i}{b_e} \frac{v_{e\parallel}}{v_{i\parallel}} \right), \quad (9)$$

so sind $\hat{v}_{i\parallel}$ und $v_{i\parallel}$ praktisch identisch.

Azimutale Wechselströme und Feldverlauf

Wir benutzen die MAXWELLSchen Gleichungen für den Entladungsraum in der Form

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\mathfrak{E}} + \mathfrak{J} &= \text{rot} \mathfrak{H}; & \mu \dot{\mathfrak{H}} &= -\text{rot} \mathfrak{E}; \\ \mu \mathfrak{H} &= \mathfrak{B}; & \mathfrak{J} &= \sigma \mathfrak{E}; & \varepsilon &\approx \varepsilon_0; & \mu &\approx \mu_0, \end{aligned} \quad (10)$$

(der ladungsträgerbedingte Verschiebungsstrom wird in der komplexen Leitfähigkeit σ berücksichtigt). Für die hier angestrebte rohe Näherung setzen wir im Entladungsraum⁷ $\sigma = \text{const.}$

Im zylindersymmetrischen Fall einer HF-beschickten Kreisspule (Vakuum-Wellenlänge groß gegen Spulenradius) ergibt sich aus (10):

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_z &= \tilde{B}_0 J_0(K|r|) e^{-i\omega t}, \\ \mathfrak{E}_x &= -y \left\{ \frac{i\omega \tilde{B}_0}{K|r|} J_1(K|r|) e^{-i\omega t} \right\} \\ \mathfrak{E}_y &= x \left\{ \frac{i\omega \tilde{B}_0}{K|r|} J_1(K|r|) e^{-i\omega t} \right\} \quad (11)\end{aligned}$$

mit $K = \sqrt{i\mu\omega(\sigma - i\epsilon\omega)}$, J_0 , J_1 BESSELSche Funktionen.

Für den Fall einer radial, z. B. aus positiver x -Richtung her einfallenden Planwelle, der z. B. für Hochfrequenzladungen im Giga-Hertz-Bereich

und für die im Abschnitt III betrachteten Effekte in Frage kommt, ergibt (11) analog:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_z &= B_0 \exp \{ -i(\omega t + Kx) \}, \\ \mathfrak{E}_y &= -(\omega B_0/K) \exp \{ -i(\omega t + Kx) \} \quad (12)\end{aligned}$$

mit $K = \sqrt{i\mu\omega(\sigma - i\epsilon\omega)}$.

Um Gln. (11) und (12) für Gl. (1) zu benutzen, sind von den angegebenen Relationen für \mathfrak{B}_z , \mathfrak{E}_x , \mathfrak{E}_y jeweils die mit (-1) multiplizierten Imaginärteile zu nehmen. Man überzeugt sich leicht, daß für $|Kr| \ll 1$ aus (12) der Fall $\alpha = 0$; $\beta = 1$ der Gl. (1) folgt.

Gln. (11) und (12) stellen im allgemeinen exponentiell ins Plasmarennere abfallende HF-Felder dar; der Imaginärteil von K ist ein Maß für die reziproke Eindringtiefe $1/d_1$.

Die komplexe Leitfähigkeit $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ resultiert in erster Ordnung aus den azimutalen Komponenten der Terme $|n - n'| = 1$ der Gl. (6). Aus der Relation

$$eN\bar{v}(t)|_{n-n'=1} = -iE_0 \{ \sigma_1 \cos(\omega t - \alpha) + \sigma_2 \sin(\omega t - \alpha) \}$$

ergibt sich für die jeweils betrachtete Trägersorte der Konzentration N eine Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \left[\frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2\omega^2}{\omega_r^2 + n^2\omega^2} \left\{ \frac{\omega_r}{\omega_0} J_n^2 + iJ_n J_n' \right\} + \frac{2\cos\alpha}{\omega_r} e^{-i\alpha} \left\{ J_1^2 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_r^2}{\omega_r^2 + n^2\omega^2} J_{n-1} J_{n+1} \right\} \right]; \quad (13)$$

$$J_n = J_n(\omega_0/\omega); \quad J_n' = dJ_n(\omega_0/\omega)/d(\omega_0/\omega).$$

Betrachtet man den Leitfähigkeitsanteil der freien Elektronen, so entnimmt man aus (13) den wohlbekannten Grenzfall $\sigma = iNe^2/m\omega$ der Plasmadispersionsformel für Stoßfreie Plasmen, den man auch durch direkte Methoden erhält, wenn man das Magnetfeld der elektromagnetischen Welle in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt (vgl. 1); man ersieht aber aus (13), daß die Gültigkeit dieser oft benutzten Dispersionsformel an die Bedingung $\omega_0 < \omega_r \ll \omega$ geknüpft ist; die Stoßfrequenz ω_r muß grundsätzlich gegenüber der Magnetfeldamplitude so groß sein, daß $\omega_r > \omega_0$ wird. Nur in diesem Falle wird für $\omega < \omega_P$ ($\omega_P = \sqrt{N e^2/m \epsilon_0} = \text{Plasmafrequenz}$) die Eindringtiefe der Wellen

$$d_1 = \lambda_P = 1/(\omega_P \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}). \quad (14)$$

Für die radialen Drifteffekte interessiert vornehmlich der entgegengesetzte Fall $\omega_{0i} \approx \omega$, und damit $\omega_{0e} \gg \omega$.

Der Leitfähigkeitsbeitrag der Elektronen ist, unter Vernachlässigung von Größen der Ordnung $(\omega/\omega_{0e})^{1/3}$ gegen eins, durch die Näherungsrelation (indem man die Summen durch Integrale approximiert)

$$\sigma_e = \frac{Ne^2}{m_e \omega_{0e}} \left[\frac{4}{\pi} \eta \left(1 - \eta \operatorname{arctg} \frac{1}{\eta} \right) + \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\omega_{0e}} \frac{1}{\eta} \cos \alpha e^{-i\alpha} \frac{1}{2} + \eta \operatorname{arctg} \frac{1}{\eta} \right] \quad (15)$$

mit $\omega_{re}/\omega_{0e} = \eta$ gegeben.

⁷ Da die Trägererzeugung mit wachsender elektrischer Feldstärke, also radial nach außen, zunimmt, wird die Trägerdichte und damit σ nach innen abnehmen. Das hat zur Folge, daß das HF-Feld tatsächlich etwas schwächer nach innen abfällt als bei konstantem σ . Die Bedingungen für

Massentrennung usw. werden also bei exakter selbstkonsistenter Lösung von (10) und (7) etwas günstiger sein als aus der im folgenden gegebenen Näherungslösung zu entnehmen ist.

Für $\eta > 1$ stellt erwartungsgemäß der elektronische Anteil den Hauptbeitrag zur Leitfähigkeit. Für kleinere Drucke ($\eta < \sqrt{m_e/m_i}$) dagegen liefern wegen $\omega_{0i} \approx \omega$ die Ionen trotz ihrer großen Masse den überwiegenden Beitrag zu σ . Anschaulich ist dies so zu verstehen, daß für $\eta < 1$ die Elektronen praktisch geschlossene Zyklotronbahnen durchlaufen ohne zu stoßen und daher dem elektrischen Feld nur noch wenig folgen. Der Leitfähigkeitsanteil der Ionen wird wesentlich durch die ersten Glieder der Summen bestimmt. Für $\omega_{0i} \approx \omega$ ergibt sich in hoher Näherung

$$\sigma_i \approx \frac{N_i e^2}{m_i \omega_{0i}} \left[\frac{4}{3} \frac{\nu}{1+\nu^2} + \frac{2}{3} \frac{\cos \alpha e^{-i\alpha}}{\nu} \right] \quad (16)$$

mit $\nu = \omega_{ri}/\omega \approx \omega_{ri}/\omega_{0i}$.

Wegen $\nu/\eta \approx \sqrt{m_i/m_e}$ ist im Bereich $\eta > 1$ das Verhältnis $\sigma_i/\sigma_e \approx \sqrt{m_e/m_i}$; für $\eta < \sqrt{m_e/m_i}$ wird $\sigma_i/\sigma_e \approx \sqrt{m_i/m_e}$.

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ aus Gl. (15) und (16), eingesetzt in (11) bzw. (12), liefert eine Bestimmungsgleichung für den Phasenwinkel α zwischen \mathfrak{E} und \mathfrak{H} gemäß (1) in der Form

$$(\mathfrak{E}_y/\mathfrak{B}_z) |\mathfrak{B}_z/\mathfrak{E}_y| = i e^{i\alpha}. \quad (17)$$

α geht für $\eta > 1$ in quasi ohmsches Verhalten über ($\alpha \rightarrow 0$ für $\eta \rightarrow \infty$). Im Bereich $\sqrt{m_e/m_i} < \eta < 1$ ist α praktisch konstant und liegt je nach Trägerkonzentration zwischen Null (kleine Trägerdichten) und $\pi/4$ (große Trägerdichten). Für $\eta < \sqrt{m_e/m_i}$ dominiert der zweite Term in Gl. (16), und α wächst, je nach Trägerkonzentration mehr oder weniger schnell, auf $\pi/2$ an (wobei die Eindringtiefe des Feldes nahezu unabhängig von der Trägerdichte einen konstanten Wert annimmt). Die radiale Drift (7) erreicht gleichfalls einen konstanten Endwert [$(\cos \alpha)/\omega_r \triangleq \text{const}$], während bekanntlich die Drift in einem elektrischen Gleichfeld mit $1/\omega_r$ anwächst. Einen quantitativen Überblick geben die Abb. 2, 3, 4. Es ist dort α , Eindringtiefe ($\sim 1/\delta_2$) und $\text{arctg } \sigma_2/\sigma_1$ aufgetragen in Abhängigkeit vom Druck ($\sim \eta = \omega_{re}/\omega_{0e}$), mit der Trägerdichte als Parameter $\sqrt{N_e} \sim \delta_0 = \sqrt{\omega/\omega_{0e}} |r|/\lambda_P$ (λ_P in der Definition von Gl. (14)).

Die Eindringtiefe ist bestimmt durch den genähert exponenziellen Verlauf von \mathfrak{B} in Gl. (11) und (12). Bei einem Entladungsradius R verläuft \mathfrak{B}_z ins Innere in der Form (ΔR Abstand von der Plasmaoberfläche)

$$\mathfrak{B}_z \approx B_0 \exp\{-\delta_2 \Delta R/R\} \quad \text{mit } K |r| = \delta_1 + i \delta_2, \quad (18)$$

$$\delta_0 = \sqrt{\omega/\omega_{0e}} |r|/\lambda_P.$$

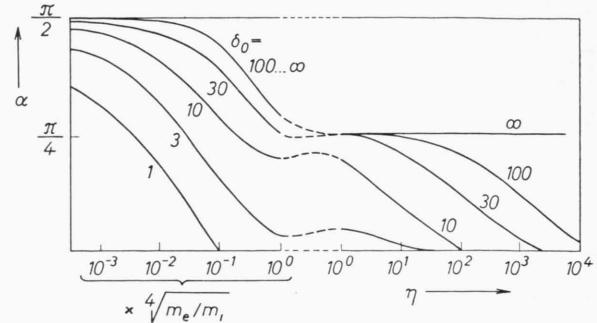


Abb. 2. Phasenwinkel α zwischen \mathfrak{E} und \mathfrak{H} in Ringentladungen in Abhängigkeit vom Druck ($\sim \eta = \omega_{re}/\omega_{0e}$) für verschiedene Trägerdichten ($\sim \delta_0^2$).

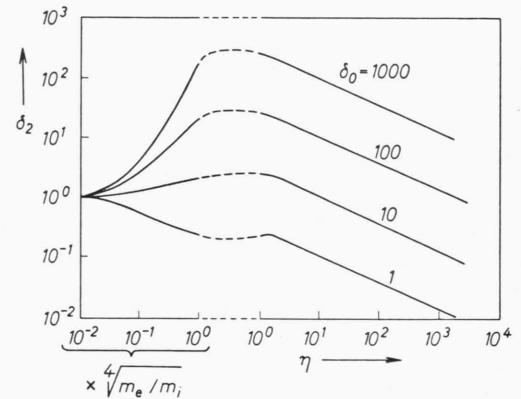


Abb. 3. Relative reziproke Eindringtiefe δ_2 in Abhängigkeit vom Druck ($\sim \eta = \omega_{re}/\omega_{0e}$) für verschiedene Trägerdichten ($\sim \delta_0^2$).

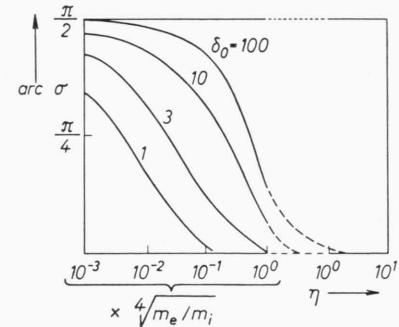


Abb. 4. Phasenwinkel zwischen Strom und elektrischer Feldstärke in Abhängigkeit vom Druck ($\sim \eta = \omega_{re}/\omega_{0e}$) für verschiedene Trägerdichten ($\sim \delta_0^2$).

Das Maximum von δ_2 liegt bei $\eta \approx 1$ und erreicht dort den Wert $\delta_2 \approx \frac{1}{3} \delta_0$. Die Eindringtiefe ist somit gegenüber dem Fall verschwindender Magnetfeldamplitude [Gl. (14)] um mindestens den Faktor $\sqrt{\omega_{0e}/\omega}$ heraufgesetzt.

Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß die radiale Drift (7) bzw. (7') für $\eta > 1$ mit wachsendem Druck sehr viel stärker gegen Null geht als die mit $1/\omega_r$ proportionale Leitfähigkeit.

II. Massentrennungseffekt im HF-Feld

Die in Abb. 1 dargestellte radiale Ionendrift läßt, zumindest in der Umgebung der Nullstelle von $v_{r=}$ (bei $\omega_{0i} \approx 2,5 \omega$), unmittelbar eine starke „Zentrifugewirkung“ des HF-Feldes erkennen: Es lassen sich prinzipiell Verhältnisse realisieren, bei denen die Ionen der schweren Komponente radial nach innen und die der leichten Komponente radial nach außen getrieben werden. Im Bereich $0 < \omega_0 < \omega$ ist gemäß (7) bzw. (7') bei nicht zu hohen Drücken gleichfalls ein Trenneffekt zu erwarten, da für $\omega_{ri} < \omega$ die Driftgeschwindigkeit $v_{r=}$ stärker von der Masse abhängt als der zu $(m \omega_{ri})^{-1}$ proportionale Diffusionskoeffizient. Es soll im folgenden eine kurze Abschätzung der auftretenden Effekte gegeben werden. Eine eingehende Diskussion der Vielzahl experimentell möglicher Fälle würde den Rahmen dieser Arbeit wesentlich überschreiten. Wir greifen einen besonders übersichtlichen und mathematisch zugänglichen Grenzfall heraus: Gegeben sei ein Gasgemisch aus zwei atomaren Isotopen (Massen m_1 , m_2 und Konzentrationen N_1 , N_2). Das Gasentladungsplasma möge aus einfach positiv geladenen Ionen der beiden Gase und aus Elektronen bestehen (Konzentrationen n_1 , n_2 , n_e), bei kleinem Ionisierungsgrad: $n_1 \ll N_1$ und $n_2 \ll N_2$.

Die Ringentladung sei zwischen den Zylinderradien R_I und R_A eingeschlossen; deren Abstand $d = R_A - R_I \ll R_I$ sei kleiner als die Eindringtiefe d_1 des HF-Feldes, $d < d_1$ [nach (18) ist $d_1 \approx R_A/\delta_2$]. Die Ionen besitzen nach (7) genähert konstante radiale Konvektionsgeschwindigkeiten v_1 , v_2 . Die Trägerbilanzgleichungen lauten damit im Rahmen der einfachen SCHOTTKYSchen Diffusionstheorie⁸ unter Hinzunahme der entsprechenden konvektiven Terme (wegen der Additivität der Drifteffekte in der linearisierten Transportgleichung):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[-D_a \frac{\partial n_a}{\partial r} + b_a E n_a + v_a n_a \right] &= \frac{N_a}{N_1 + N_2} Z n_e, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[-D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} - b_e E n_e \right] &= Z n_e, \quad \alpha = 1, 2; \quad (19) \end{aligned}$$

D_1 , D_2 bzw. D_e Diffusionskoeffizienten von Ionen bzw. Elektronen, b_1 , b_2 , b_e Beweglichkeiten, E ambipolares Feld, Z Trägererzeugungswahrscheinlichkeit (Diffusion und Beweglichkeit sind durch das Wechselfeld etwas vermindert; in erster Näherung können aber die betreffenden Gleichfeldwerte benutzt werden).

Unter Berücksichtigung der Quasineutralitätsbedingung $n_1 + n_2 \approx n_e$ kann für $Z \approx \text{const}$ die Gl. (19) in bekannter Weise durch Elimination von E näherungsweise gelöst werden. Die allgemeine Lösung führt auf etwas unübersichtliche Relationen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die anzureichernde Komponente (N_1) im Ausgangsgemisch in kleiner Konzentration vorhanden ist, $N_1 \ll N_2$. Dann wird die Entladung wesentlich durch die Verteilung n_2 bestimmt. Wegen D_1 , $D_2 \ll D_e$ und $b_1, b_2 \ll b_e$ ergibt sich aus (19)

$$\begin{aligned} n_2 &= n_{20} \exp \{ -K_2 x \} \sin(\pi/d) x; \\ Z &= D_{a2} (K_2^2 + \pi^2/d^2), \end{aligned} \quad (20)$$

mit dem ambipolaren Diffusionskoeffizienten

$$D_{a2} = (b_2/b_e) D_e \approx k T_e / m_2 \omega_{r2} \gg D_2.$$

$$K_2 = -v_2/2 D_{a2} \quad \text{und} \quad x = r - R_I \quad (0 \leq x \leq d).$$

Die günstigsten Trennbedingungen werden wir erwarten, wenn v_1 und v_2 entgegengesetzt gerichtet sind, $v_1 \approx -v_2$. v_2 sei z. B. radial nach innen gerichtet ($v_2 \approx -v_1 < 0$). Sind dann v_1 und v_2 groß genug, so strömen praktisch alle Ionen n_2 zur Wand R_I und alle Ionen n_1 zur Wand R_A (für $|K_1|$, $K_2 > 2\pi/d$ mit einem Fehler $< 10\%$). An der Wand R_I bzw. R_A rekombinieren pro cm^2 und sec

$$D_{a2} \frac{N_2}{N_1 + N_2} n_{20} \frac{\pi}{d} \quad \text{bzw.} \quad D_{a2} \frac{N_1}{N_1 + N_2} n_{20} \frac{\pi}{d} \quad (21)$$

Ionen. [Für den weniger interessanten Fall $K_2 \gg 2\pi/d$ treten zu (21) noch Terme hinzu, die hier nicht näher diskutiert werden sollen.]

Eine nähere Betrachtung der Entladungsform (20) legt die Definition eines effektiven Ionisierungsgrades

$$\gamma = (n_{20}/N_2) (\pi D_{a2}/v_2 d)$$

nahe⁹, mit dem die Wandverluste (21) die einfache Gestalt erhalten:

$$\left(D_{a2} \frac{dn_2}{dx} \right)_{x=0} = +\gamma N_2 v_2; -\left(D_{a1} \frac{dn_1}{dx} \right)_{x=d} = \gamma N_1 v_2. \quad (22)$$

⁹ Diese Definition ist im Rahmen der angestrebten Näherung vernünftig, da die wesentliche Entladungszone ungefähr auf den Bereich $0 < x < 1/K_2$ beschränkt bleibt.

⁸ Handbuch der Physik XXII, Verlag Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956, S. 53 ff.

Die Driftterme (22) ergeben ganz analog zur mechanischen Massenzentrifuge, vgl.¹⁰, im Gleichgewichtszustand (ohne Entnahmestrom) einen Trennfaktor

$$\varphi_0 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)_{x=d} / \left(\frac{N_1}{N_2} \right)_{x=0} \approx \exp \left\{ \frac{2 \gamma |v_2| d}{D_{12}} \right\}, \quad (23)$$

wo $(2/D_{12}) = (1/D_1) + (1/D_2)$.

Da Werte $2|v_2|d/D_{12} > 1$ technisch durchaus realisierbar sein sollten, übertrifft der Trennfaktor (23) alle thermodiffusionsbedingten Entmischungseffekte, selbst wenn für diese z. B. Lichtbogentemperaturen — wie kürzlich von MAECKER und FRIE diskutiert¹¹ — von mehr als 10^4 °K herangezogen werden. Die Relation $2|v_2|d/D_{12} > 1$ besagt wegen $|v_2|/D_{12} \approx e E_{\text{eff}}/kT$, wo E_{eff} die radial an den Ionen angreifende äquivalente Gleichfeldstärke, T die Gastemperatur:

$$2\gamma|v_2|d/D_{12} \approx 2\gamma e E_{\text{eff}} d/kT > 1; \quad (24)$$

bei einer Gastemperatur von $T = 600$ °K, einem Ionisierungsgrad $\gamma = 0,01$ und einer Eindringtiefe des Feldes $d_1 \approx d = 3$ cm ist (24) erfüllt für $E_{\text{eff}} > 1$ V/cm.

Die Abhängigkeit des Trennvermögens (separative power) von φ_0 wird analog¹⁰, wie bei den mechanischen Zentrifugen genähert proportional $(\ln \varphi_0)^2$, bei einer konstanten Entnahmestromstärke (Teilchenstrom) $(N_1 + N_2) V \approx (N_1 + N_2) D_{12}/d$.

Die Feldstärke E_{eff} ist prinzipiell nur durch die Bedingung (8) eingeschränkt, nach der wegen (11): $E_0 \approx (m_1/e) \omega^2 d_1$; E_0 ist somit durch die höchstzulässige bzw. verfügbare Frequenz prinzipiell begrenzt, kann aber bei entsprechender HF-Leistung Größenordnungen oberhalb 1 V liegen. Darin dürfte das Verfahren jeder technisch realisierbaren mechanischen Zentrifuge überlegen sein, bei der die den Trennfaktor bestimmende Umfangsgeschwindigkeit des Rotors drastisch beschränkt wird durch die Zerreißfestigkeit des Rotormaterials. Der Energiebedarf der HF-Entladung sollte allerdings im allgemeinen höher liegen als bei einer entsprechenden Zentrifuge. Abgesehen von Strahlungsverlusten und elastischen Stößen verbraucht die im vorstehenden betrachtete Entladung bei einer Ionisierungsenergie ε_i eine Leistung

$$L_{\text{HF}} = \varepsilon_i (N_1 + N_2) \gamma v_2 \quad (25)$$

¹⁰ K. COHEN, The Theory of Isotope Separation, McGraw-Hill Book Co., New York 1951.

¹¹ W. FRIE u. H. MAECKER, Z. Phys. **162**, 69 [1961].

pro cm² Mantelfläche. Für $\varphi_0 \approx 2$ und eine Entnahmestromstärke $(N_1 + N_2) V \approx (N_1 + N_2) D/d$ ist also pro Teilchen, das an der Entnahmestelle ($x = d$) die Entladung verläßt, ungefähr eine Energie ε_i aufzubringen; im selben Fall bei einer mechanischen Zentrifuge (MZ) jedoch, vgl.¹⁰, etwa das $(m_1 + m_2) / |m_1 - m_2|$ - fache der thermischen Energie des Teilchens. Es ergibt sich also ein Leistungsverhältnis von

$$\frac{L_{\text{HF}}}{L_{\text{MZ}}} \approx \frac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{kT}, \quad (26)$$

was nur bei schweren Isotopen nahe Eins liegt, bei leichten Isotopen erheblich höher.

III. Drift im HF-Feld bei starkem statischen Magnetfeld

Gleichgerichtete Trägerdriften in HF-Feldern sind im allgemeinen als Effekte zweiter Ordnung aufzufassen (wie z. B. die Einschnürungswirkung eines elektromagnetischen Feldes bei sehr hoher Frequenz vermöge des Strahlungsdruckes). Im Abschnitt I wurde gezeigt, daß unter geeigneten Resonanzbedingungen diese Driften auch zu einem Effekt erster Ordnung (wie z. B. die Drift in einem elektrischen Gleichfeld) werden können. Die Frage, ob durch ein HF-Feld auch bei Vorhandensein starker statischer Magnetfelder gleichgerichtete Driften erster Ordnung erzeugt werden können, scheint von erheblicher Bedeutung für Probleme der Stabilität von Fusionsplasmen zu sein¹².

Berechnungen des hydromagnetischen Verhaltens eines Hochtemperaturplasmas unter zusätzlicher Einwirkung von HF-Feldern tragen noch immer den Charakter grob vereinfachter Näherungen, ganz gleich, ob der hydromagnetische, der stochastische oder der kinetische Aspekt des Problems in den Vordergrund treten. Im folgenden wird versucht, aus den rein kinematischen Betrachtungen des Abschnitts I einige Anhaltspunkte über das Driftverhalten der Ionen zu gewinnen. Dieser Weg läßt unmittelbar die charakteristischen Eigenschaften der Drift auf elementarem Wege hervortreten; außerdem kann die bei der Rechnung erhaltene optimale HF-Frequenz bei hinreichend großem statischem Magnetfeld höher als alle auftretenden Änderungs frequenzen hydromagnetischer und kooperativer Er-

¹² Conf. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fusion Res. Salzburg 1961. Abstracts CN-10/233.

scheinungen liegen, so daß eine systematische Abänderung der kinematischen Ergebnisse durch innere Fluktuationen nicht wesentlich zu erwarten ist und somit nachträglich dem kinematischen Verhalten eine gewisse Realität zugeordnet werden darf.

Wir betrachten der mathematischen Einfachheit halber ein vollständig ionisiertes Plasma in einem homogenen statischen Magnetfeld B_{00} (parallel zur z -Achse) und eine linear polarisierte Welle mit B -Vektor gleichfalls parallel zur z -Achse ($B_0 \ll B_{00}$), die aus der positiven x -Richtung kommend bei $x=R$ auf die Plasmaoberfläche treffen möge. Nach Gl. (12) wird das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_z &= B_{00} + B_0 \exp \{k_2(x-R)\} \sin(\omega t + k_1 x); \\ \mathfrak{B}_x &= \mathfrak{B}_y = 0; \\ \mathfrak{E}_y &= -E_0 \exp \{k_2(x-R)\} \cos(\omega t + k_1 x - \alpha); \\ \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_z = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

mit $E_0 = \omega B_0 / |K|$
und $K = \sqrt{i \mu \omega (\sigma - i \varepsilon_0 \omega)} = k_1 + i k_2$.

Wegen $B_0 \ll B_{00}$ führen die Träger in nullter Näherung Zyklotronbewegungen

$$x = x_0 + (v_{\text{th}}/\Omega_0) \sin \Omega_0 t$$

aus [$\Omega_0 = (e/m) B_{00}$ statische Zyklotronfrequenz, v_{th} thermische Geschwindigkeit]. Bis auf Frequenzverstimmungen bzw. -schwankungen von der Ordnung $v_{\text{th}}(k_1/\Omega_0)$ stellt somit die Bewegungsgleichung (2) eine brauchbare Beschreibung des Verhaltens der Ionen dar, wenn dort ω_c durch $\omega_c + i \Omega_0$ ersetzt wird. Fordern wir vernünftigerweise, daß die Eindringtiefe des HF-Feldes ($1/k_2$) größer sein soll als die Wellenlänge, so wird die Drift im wesentlichen durch Gl. (5) beschrieben (mit $\omega_c \rightarrow \omega_c + i \Omega_0$). Gelangt ein Teilchen zur Zeit t_0 in den Wirkungsbereich des HF-Feldes, dann ergibt sich für Zeiten $t - t_0$, die genügend groß sind, so daß

$$t - t_0 > 1/|\omega_c + i(\Omega_0 - \omega)|, \quad (28)$$

wird, aus (5) neben einer azimutalen Drift, die hier nicht näher betrachtet werden soll, eine radial gerichtete nichtoszillatorische Drift. Diese hat unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in ω_0/ω die Gestalt ($\omega_0/\omega \ll 1$):

$$\begin{aligned} v_r = & - \left| \frac{e}{2m} E_0 \right| J_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) J_1 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ & \cdot \left\{ \frac{(\omega - \Omega_0) \sin \alpha - \omega_c \cos \alpha}{\omega_c^2 + (\omega - \Omega_0)^2} + \frac{2 \cos \alpha \omega_c}{\omega_c^2 + \Omega_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{(\omega + \Omega_0) \sin \alpha - \omega_c \cos \alpha}{\omega_c^2 + (\omega + \Omega_0)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Gl. (29) bleibt auch bei Berücksichtigung der Zyklotronbewegung bis auf Terme der Ordnung ω_0/ω richtig, wenn in (29) mit $x = x_0 + (v_{\text{th}}/\Omega_0) \sin \Omega_0 t$ die Relation erfüllt ist:

$$k_1 v_{\text{th}}/\Omega_0 < 1. \quad (30)$$

Dies läßt sich unmittelbar durch Lösung von (2) unter Benützung der Relation

$$\sin[(k_1 v_{\text{th}}/\Omega_0) \sin \Omega_0 t] \approx (k_1 v_{\text{th}}/\Omega_0) \sin \Omega_0 t$$

verifizieren.

Gl. (29) ergibt für $\omega \gg \Omega_0$ eine mit $1/\omega^2$ verschwindende, ins Plasmaintern gerichtete Drift, wie man sie unter dem Einfluß des Strahlungsdruckes erwarten sollte:

$$v_r = (\omega \gg \Omega_0) \approx - |(e/2m) E_0| (\omega_0/\omega^2) \sin \alpha. \quad (31)$$

Diese kleine Drift 2. Ordnung erreicht theoretisch ihr im allgemeinen um viele Größenordnungen höheres Resonanzmaximum (Drift 1. Ordnung) in der Nähe der Zyklotronfrequenz, und zwar bei

$$\omega \approx \Omega_0 + \omega_c (\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \cos \alpha) / \sin \alpha. \quad (32)$$

Dieses Maximum ist aus folgendem Grunde praktisch nicht realisierbar: Die effektive Stoßfrequenz ω_c ist in Hochtemperaturplasmen sehr klein gegen Ω_0 . Da das HF-Feld nach (30) für $\omega \approx \Omega_0 - \omega_c / \sin \alpha$ einen maximalen Sog zur Plasmaoberfläche ausübt, müßten die durch innere und äußere Einflüsse bedingten Schwankungen von Ω_0 unbedingt klein sein gegen $\omega_c / \sin \alpha$, wenn das HF-Feld einschnürende Wirkung haben soll. Doch selbst wenn man den äußeren Stromkreis so konstant halten könnte und auch die durch kooperative Effekte im Plasma bedingten Schwankungen klein genug wären, ist die Bedingung (28) in sehr heißen Plasmen (zumindest im vornehmlich in Betracht kommenden Niederdruckbereich) für den Resonanzfall (32) im allgemeinen nicht realisiert, denn für Zeiten

$$t - t_0 < 1/|\omega_c + i(\Omega_0 - \omega)|$$

ist (29) nicht mehr gültig.

Aus (5) folgt in diesem Falle

$$v_r \approx |(e/4m) E_0| (B_0/B_{00}) (t - t_0) \cos \alpha. \quad (33)$$

Jedes Teilchen erfährt gemäß (33) bei seinem Eintreten in das HF-Feld zunächst einen Sog zur Plasmaoberfläche. Nur wenn die Eindringtiefe des HF-Feldes und die Frequenzverstimmung $\omega - \Omega_0$ groß genug sind, daß sich das Teilchen trotz der anfänglichen Sogwirkung noch eine Zeit

$$t - t_0 > 1/|\omega_c + i(\Omega_0 - \omega)|$$

innerhalb des Plasmas aufhält, so kann das HF-Feld die zur Plasmaoberfläche strömenden Teilchen nach Gl. (29) ins Innere zurückwerfen.

Die Frequenzverstimmung $\omega - \Omega_0$ ist somit im allgemeinen erheblich größer zu wählen, als dem Maximum von $|v_{r=}| \approx |(e/4m) E_0| (\omega_0/\omega \omega_c)$ bei der Frequenz (32) entsprechen würde. Der optimale Wert hängt wesentlich von Eindringtiefe des HF-Feldes, Strömungsgeschwindigkeit der Führungszentren und evtl. Schwankungen des statischen Magnetfeldes ab.

Eine erste Orientierung über die Eindringtiefe des Feldes erhält man analog zu den Betrachtungen im Abschnitt I. Sofern ω genügend in der Nähe der Ionenzylotronfrequenz liegt, ist σ wesentlich durch den Ionenwechselstrom bestimmt; liegt ω in der Nähe der Elektrozyklotronresonanz, durch den Elektronenwechselstrom; also wird in beiden Fällen

$$\sigma = \frac{e^2 N}{2m} \left[\frac{\omega_c + i(\omega - \Omega_0)}{\omega_c^2 + (\omega - \Omega_0)^2} \right] \quad (34)$$

mit den jeweils zu Ω_0 gehörenden Werten m , ω_c (m_i , ω_{ci} , Ω_{0i} bzw. m_e , ω_{ce} , Ω_{0e}). Nimmt man $(\omega - \Omega_0) \sim v_{th}$ an, so wird $\sigma \sim 1/Vm$: Die Eindringtiefe des Feldes bei Ionenzylotronresonanz ist erheblich größer als bei Elektronenzylotronresonanz und sollte wegen des entsprechend herabgesetzten Schwellenwertes von $(\omega - \Omega_0)$ bei Ionenresonanz bessere Einschnürungswirkungen haben.

Anhang

Zur Integration der Gl. (3) (mit βr und $\alpha=0$) nach der HILLSchen Methode hat man die Substitution

$$r = \varrho \exp \left\{ -\frac{\omega_c}{2} t + \frac{i \omega_0}{2 \omega} (1 - \cos \omega t) \right\}$$

auszuführen. Damit geht (5) über in

$$\ddot{\varrho} - \frac{1}{4} [\omega_c + i \omega_0 \sin \omega t]^2 \varrho = 0. \quad (a)$$

Gl. (a) lässt sich lösen durch den Ansatz

$$\varrho = e^{\mu \omega t/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i n \omega t}. \quad (b)$$

Dann ist nach HILL¹³ der Driftparameter μ durch die Relation

$$\sin^2(\frac{1}{2} i \pi \mu) = \mathcal{A}(0) \sin^2(\frac{1}{2} \pi \sqrt{-a})$$

gegeben, wobei $\mathcal{A}(0)$ die unendliche Determinante

$$d_{nn} = 1; \quad d_{n,n\pm 1} = i b / (4n^2 + a); \\ d_{n,n\pm 2} = -c / (4n^2 + a); \quad d_{nm} = 0 \quad \text{sonst.}$$

darstellt, mit

$$a = \frac{\omega_c^2 - \omega_0^2/2}{\omega^2}; \quad b = \frac{\omega_c \omega_0}{\omega^2}; \quad c = \frac{\omega_0^2}{4 \omega^2}.$$

Man erkennt sofort die Resonanzstellen der Determinante $\mathcal{A}(0)$ für die Werte

$$a = -4n^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Alle Resonanzen dieser Art mit $n \neq 0$ haben vorwiegend imaginäres μ , d. h. es entstehen quasiperiodische Bewegungen, die zwar Energie aus dem HF-Feld aufnehmen, aber diese nur in thermische Bewegung umsetzen, ohne daß eine nennenswerte Gleichdrift Zustände kommt.

Die Resonanzstelle $a=0$, d. h. $\omega_c^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 = 0$, dagegen liefert den reellen Wert

$$\mu = \pm \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\omega_c} \operatorname{Im} \operatorname{Sin} \frac{\pi}{4} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\omega_c}{\omega},$$

der eine starke Drift von der Größe $v \approx -\frac{1}{2} r \omega_0$ hervorruft, mit maximaler Massenabhängigkeit bei $\omega \approx \omega_0/2 \sqrt{2}$. Der explizite Zusammenhang zwischen der Drift-Geschwindigkeit (bzw. deren Massenabhängigkeit) und $\omega_s + \omega_c$ lässt sich erst durch eine (etwas mühsame) explizite Berechnung der Entwicklungskoeffizienten erhalten, auf die hier verzichtet werden soll.

¹³ E. T. WHITTAKER u. G. N. WATSON, Modern Analysis, University Press, Cambridge 1952.